

数学思维训练

小学数学思维训练经典题组

(五年级第 3 册修订版)

刘育涛 编 著

電子工業出版社·

Publishing House of Electronics Industry

北京 · BEIJING

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有，侵权必究。

图书在版编目（CIP）数据

小学数学思维训练经典题组. 五年级. 第3册 / 刘育涛编著. —修订本. —北京：电子工业出版社，2016.1

ISBN 978-7-121-28091-7

小... 刘... 小学数学课—习题集 G624.505

中国版本图书馆CIP数据核字（2016）第012068号

策划编辑：孙清先

责任编辑：郝黎明

印 刷：

装 订：

出版发行：电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编 100036

开 本：787×1 092 1/16 印张：8.5 字数：190.4千字

版 次：2016年1月第1版

印 次：2016年1月第1次印刷

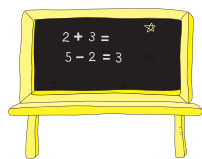
定 价：26.50元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：(010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 zllts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：(010) 88258888。

序 言



郑州的平行线教育是近年来办学成绩卓著的一所课外培训学校，在 2014 年“华罗庚金杯”少年数学邀请赛中，其学员囊括了郑州市初中组前十名中的九名，小高组前十名中的八名。在《大河报》上经常可以看到有关平行线教育的相关报道。平行线的数学教育为补充和提高基础教育做出了良好的成绩，为中学教育选拔和培养了一批又一批优质的幼苗，获得了学生、家长、社会的好评。

平行线这所年轻的培训学校，这样一批年轻的教师之所以创出了这样的业绩，靠的是正确的育人理念、拼搏奋斗的团队精神和精益求精的敬业精神；靠的是努力学习钻研，吸取百家之长，转化为自己经验的包容精神，脚踏实地地落实在集体备课、教材建设等基础建设之上。

平行线的数学教学遵循着“现实是基础，兴趣引入门，思维是核心，证明是灵魂”的理念，补充和完善了当前中小学数学基础教育中的不足，体现了高质量的数学素质教育。

每个中小学生都有自己的梦，正是每个人的梦汇集成了伟大的民族梦、中国梦。中国要成为世界第一流的强国，人才的培养是关键。而数学是人才培养中极为重要的基础学科。数学是锻炼思维的体操，是打开科学大门的钥匙，是攀登科学高峰的天梯。青少年时期学好数学、喜爱数学，与实现伟大中国梦的大方向完全一致，还是俗话说的好，学好数理化，建设祖国本领大！

平行线教育编写的“数学思维训练”丛书，值得有志于学好数学的同学选读。读一读、算一算，想一想、做一做，希望通过学习能提高你的成绩，从中还可以体会“成绩是开始，品格是永远”的道理。

华罗庚说：“学习科学时，必须掌握知难而进的原则。”

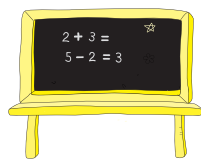
数学家的经验之谈：数学是算懂的，而不是看懂的，当然更不是听懂的。
请你记住数学界流传的一句话，“上帝就在细节中！”

我们坚信，每个人都可以通过刻苦努力学好数学，变得更加聪明！

首都师范大学数学科学学院
周春荔

2014年6月10日

前言



目前，很多家长和中学生只关注中考、高考。因为对于学生而言，这是他们升学的唯一途径，是进入高等院校的独木桥。但对于很多优秀的孩子来说，这远远不够。名校的自主招生，国内外的数学竞赛等都会为他们开辟更为广阔的天地，让他们有更大的作为。尤为重要的是，数学思想、科学思维体系的构建会让他们受益终身。近几年北大、清华、复旦等 985 高校的自主招生比例逐年加大，这部分学校对学生在数学方面的要求也越来越高。为了更好地帮助这些在数学方面有梦想的孩子，本书应运而生。

本书的编写，以中考、名校自主招生、国内外竞赛所需求的能力为导向，而不是简单地割裂它们之间的联系，它具有以下几个特点。

第一，在构建知识体系的基础上更注重构建孩子的思维体系。

本书注重讲解基础的数学知识与数学方法，先构建一个知识的平台，彻底夯实学生的基本功。在此基础上，通过多种变式，多个视角，去培养孩子思考问题的习惯，进而形成科学的思考习惯，而这种习惯又会帮助孩子提高对知识体系的认识，形成一个良性循环的学习状态。

第二，突出题组设计——不同的难度，同样的方法。

从基础题组入手，通过提出反问题、特殊问题一般化、数量关系复杂化，把问题放在不同背景下，将问题与数论等其他知识相结合，层层拔高，环环相扣，难度不同，却多题归一，本质的方法是一样的。让孩子在获得成就感的同时体会到数学的巨大魅力。

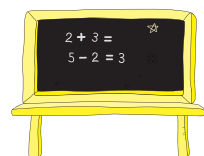
“技巧”是工具，“思路”是能力，建议师生朋友在使用本书的过程中，不仅关注“解题技巧”，更要关注“解题思路”，即使题目披着各种“外衣”，我们

也能够找出解题的方法，进而打破只会做原题的“怪圈”。

虽然我们追求精益求精，但难免会有不当的地方，恳请各位同行、广大的师生朋友提出您宝贵的意见。

平行线教育 刘育涛 韩涛 刘丽娟

目 录



第一讲 容斥原理	1
预习	1
新课	3
组一	3
组二	6
组三	8
家庭作业	10
学习笔记	12
第二讲 认识质数、合数	13
预习	13
新课	15
组一	15
组二	18
家庭作业	19
学习笔记	21
第三讲 因数	22
预习	22
新课	23
组一	23
组二	25
组三	26
家庭作业	27
学习笔记	28
第四讲 分解质因数	29
预习	29
新课	30
组一	30
组二	33

组三	34
家庭作业	36
学习笔记	37
第五讲 数形结合解题	38
预习	38
新课	39
组一	39
组二	40
*组三	42
家庭作业	44
学习笔记	45
第六讲 最大公因数与最小公倍数	46
预习	46
新课	47
组一	47
组二	49
组三	53
家庭作业	54
学习笔记	55
第七讲 完全平方数	56
预习	56
新课	57
组一	57
组二	59
组三	61
家庭作业	62
学习笔记	63
第八讲 几何（九）	64
预习	64
新课	65
组一	65
组二	66
组三	67
组四	69
组五	72
组六	74
家庭作业	76



学习 笔记	77
第九讲 典型行程（一）	78
预习	78
新课	80
组一	80
组三	83
家庭作业	84
学习 笔记	86
第十讲 变换与操作	87
预习	87
新课	89
组一	89
组二	91
家庭作业	95
第十一讲 牛吃草	96
预习	96
新课	98
组一	98
组二	100
家庭作业	103
学习 笔记	104
第十二讲 余数问题	105
预习	105
新课	106
组一	106
组二	109
家庭作业	113
学习 笔记	114
第十三讲 不定方程	115
预习	115
新课	117
组一	117
组二	118
组三	121
家庭作业	122
学习 笔记	124

平行线教育小学数学课程体系

二年级

一、计算

1. 加法与减法
2. 加减法计算技巧
3. 乘法与除法

二、数列与数表

1. 找规律

三、应用题与代数

1. 等量代换与等式性质四则运算综合
2. 移多补少

四、组合问题

1. 枚举法含树形图
2. 图形操作趣题
3. 图论问题（一）

五、几何

1. 图形认知
2. 长度问题

六、数学思想与方法

1. 动手操作

三年级

一、计算

1. 乘除法巧算
2. 四则运算综合

二、数列与数表

1. 找规律
2. 等差数列

三、应用题与代数

1. 认识倍数归一法
2. 和倍与差倍
3. 和差问题
4. 年龄问题
5. 盈亏问题
6. 鸡兔同笼问题

四、组合问题

1. 枚举法含树形图
2. 周期问题
3. 加法与乘法原理
4. 标数法
5. 组合最值趣题（一）
6. 逻辑推理
7. 数字谜（一）（二）（五）
8. 必胜策略问题

五、数论问题

1. 位值原理与进位制
2. 带余数的除法

六、几何

1. 长度问题
2. 图形计数
3. 格点与割补

七、数学方法与思想

1. 寻找不变量
2. 分类与分步
3. 有序与无序
4. 对应
5. 还原
6. 动手操作

四年级

一、计算

1. 多位数计算（大数计算）
2. 数列计算（一）
3. 定义新运算

二、数列与数表

1. 数表（一）

2. 斐波纳契数列

3. 等比数列

三、应用题与代数

1. 间隔与方阵问题
2. 鸡兔同笼问题
3. 平均数问题
4. 用字母表示数
5. 方程解应用题

四、行程问题

1. 行程问题的基本数量关系与平均速度
2. 相遇与追及
3. 多次相遇与追及
4. 多人相遇与追及

五、组合问题

1. 加法与乘法原理
2. 图论问题（一）
3. 奇偶分析
4. 组合最值趣题（一）
5. 抽屉原理
6. 容斥原理
7. 排列与组合
8. 体育比赛中的数学问题
9. 数字谜（三）（五）

六、数论问题

1. 整除（一）（二）
2. 质数与合数（一）

七、几何

1. 角度问题
2. 三角形与四边形的面积计算：面积公式推导
3. 图形分割技巧

八、数学思想与方法

1. 寻找不变量
2. 分类与分步
3. 还原
4. 分组与配对
5. 整体与局部
6. 借来还去
7. 找隐含条件
8. 倒序相加错位相减
9. 特殊到一般
10. 组合中特殊方法

五年级

一、计算

1. 小数计算
2. 定义新运算
3. 比较与估算

二、数列与数表

1. 数表（二）

三、应用题与代数

1. 方程解应用题
2. 多元一次方程组
3. 统计问题
4. 牛吃草问题

四、行程问题

1. 环形跑道问题
2. 流水行船问题
3. 火车问题
4. 典型行程

五、组合问题

1. 逻辑推理
2. 数字谜（四）（五）（六）
3. 极端分析法
4. 组合最值趣题（二）（三）
5. 存在与可行性问题

6. 算两次

7. 归纳与递推

8. 图论问题（二）

六、数论问题

1. 带余数的除法
2. 同余
3. 最大公约数与最小公倍数
4. 完全平方数
5. 不定方程
6. 数的分拆

七、几何

1. 等积变形（一）（二）
2. 图形变换
3. 面积差问题
4. 利用容斥关系解面积问题
5. 多面体计算
6. 展开图与三视图综合应用

八、数学思想与方法

1. 寻找不变量
2. 数形结合
3. 对应
4. 化归
5. 极端元素与极端情况分析法
6. 缩小包围圈
7. 构造与论证（含反证法）
8. 数论分析法
9. 设而不求

六年级

一、计算

1. 分数基本计算
2. 数列计算（二）

二、应用题与代数

1. 和差倍分问题
2. 比和比例
3. 整数型应用题
4. 工程问题
5. 浓度问题
6. 经济问题
7. 钟面问题
8. 应用题综合

三、行程问题

1. 变速问题
2. 用不等式求解某些行程问题
3. 用数论方法求解某些行程问题

四、组合问题

1. 数字谜（三）（七）
2. 算两次
3. 图论问题（二）
4. 染色法
5. 操作问题
6. 必胜策略问题
7. 概率问题

五、数论问题

1. 高斯记号

六、几何

1. 等积变形（三）
2. 勾股定理
3. 圆与扇形面积计算
4. 旋转体计算
5. 几何极值

七、数学思想与方法

1. 缩小包围圈
2. 构造与论证（含反证法）
3. 数论分析法

第一讲

容斥原理



预 习



知识 GPS

(1) 本讲内容

- A. 两重叠问题
- B. 三重叠问题
- C. 图形中的重叠问题
- D. 容斥原理在数论问题中的应用
- E. 容斥原理在一半模型中的应用

(2) 前铺知识

- | | |
|----------|----------|
| 重叠思想 (一) | (二年级·春季) |
| 重叠问题 (二) | (三年级·暑期) |

(3) 后续知识

- | | |
|---------|----------|
| 几何 (十三) | (六年级·秋季) |
| 几何 (十四) | (六年级·秋季) |



智慧之路

解题方法：

A. 枚举

B. 画图：韦恩图

C. 公式（单加双减）：

• 两重叠问题： $A \cap B = A + B - A \cup B$

• 三重叠问题： $A \cap B \cap C = A + B + C - A \cup B - A \cup C - B \cup C + A \cup B \cup C$

数学思想：重叠思想

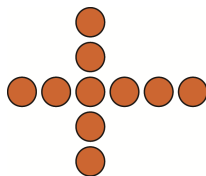


课前加油站

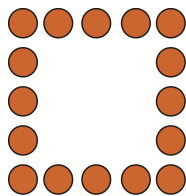
(1) 动画：集合[重叠问题]等。

(2) 两对父子去钓鱼，每人钓一只鱼，一共钓了三只。这是为什么呢？

(3) 下图有几枚硬币？试移动其中 1 枚硬币，使横行、竖行都有 6 枚硬币。



（4）数一数，图中有几枚硬币，你能想出几种数法呢？



新 课

组

一

*单加双减

两重叠问题： $A \cup B = A + B - A \cap B$

三重叠问题： $A \cup B \cup C = A + B + C - A \cap B - A \cap C - B \cap C + A \cap B \cap C$

1. 某山区的村落有人口 2476 人，全村落的人都会说普通话或广东话。调查所得，会说普通话的有 1765 人，会说广东话的有 987 人。问会说普通话和广东话两种语言的有多少人？

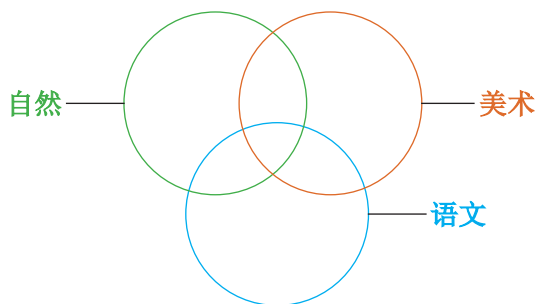
2. 五（二）班有 48 名学生，在一节自习课上，写完语文作业的有 30 人，写完数学作业的有 20 人，语文、数学作业都没写完的有 6 人。

（1）语文、数学作业都写完的有多少人？

（2）只写完语文作业的有多少人？

3. 五年级某班有 62 名同学在进行课堂小测验，答对第一道题的有 52 人，答对第二道题的有 49 人，两题都答对的有 43 人。问至少答对一道题的有多少人？两题都没答对的有多少人？

4. 五年级三班学生参加课外兴趣小组，每人至少参加一项。其中有 25 人参加自然兴趣小组，35 人参加美术兴趣小组，27 人参加语文兴趣小组，参加语文同时又参加美术兴趣小组的有 12 人，参加自然同时又参加美术兴趣小组的有 8 人，参加自然同时又参加语文兴趣小组的有 9 人，语文、美术、自然三科兴趣小组都参加的有 4 人。求这个班的学生人数。



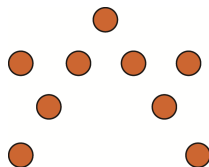
5. 某文艺团体有 48 人，每人至少会一种表演艺术。其中会骑马的有 32 人，会跳舞的有 28 人，会击剑的有 24 人，会骑马又会跳舞的有 16 人，会跳舞又会击剑的有 14 人，会击剑又会骑马的有 10 人。电影导演想选骑马、跳舞、击剑都会的人去当演员，这位导演能选中几个演员？

- *6. 某班学生手中分别拿红、黄、蓝三种颜色的小旗，已知手中有红旗的共有 34 人，手中有黄旗的共有 26 人，手中有蓝旗的共有 18 人。其中手中有红、黄、蓝三种小旗的有 6 人。而手中只有红、黄两种小旗的有 9 人，手中只有黄、蓝两种小旗的有 4 人，手中只有红、蓝两种小旗的有 3 人，那么这个班共有多少人？
- **7. 甲、乙、丙三人同时给 100 盆花浇水。已知甲浇了 78 盆，乙浇了 68 盆，丙浇了 58 盆，那么三人都浇过的花最少有多少盆？
- **8. 某班共有学生 48 人，其中 27 人会游泳，33 人会骑自行车，40 人会打乒乓球。那么，这个班至少有多少学生这三项运动都会？
- **9. 甲、乙、丙三人共解出 100 道数学题，每人都解出了其中的 60 道题，现将其中只有一人解出的题叫做难题，三人都能解出的题叫做容易题。问容易题与难题相差多少题？

- **10. 冬冬和爸爸、妈妈去芬兰旅游，他们拍了很多照片。回家后，冬冬先把自己所有自己的照片放到自己的相册里，再把剩下的有妈妈像的照片放到妈妈的相册里，最后把剩下的照片放到爸爸的相册里。爸爸认为应该把所有自己的照片都放到自己相册里，于是从冬冬和妈妈的相册里一共拿出了 37 张照片放到了自己的相册。妈妈不同意，又把放在冬冬和爸爸相册里的所有自己的 45 张照片都拿出来放到了自己的相册。请问：究竟是妈妈和冬冬的合影多，还是爸爸和冬冬的合影多？多几张？



下图是由 9 枚硬币摆成的一个“大”字，请你移动 2 枚硬币把它变成“人”字。

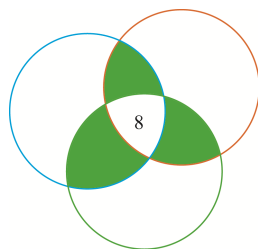


*图形中的重叠问题

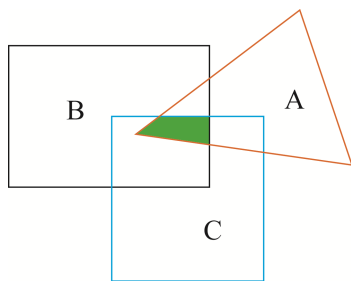
*容斥原理在一半模型中的应用



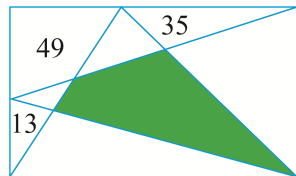
- *1. 有三个面积各为 20 平方厘米的圆纸片放在桌上，如下图所示。三个纸片共同重叠的面积是 8 平方厘米，三个纸片盖住桌面的总面积是 36 平方厘米。问图中阴影部分的面积之和是多少？



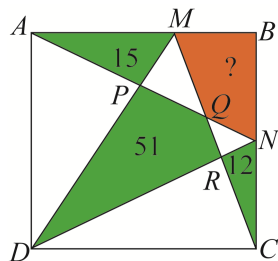
- **2. 如下图所示，A、B、C 分别是面积为 12、28、16 的三张不同形状的纸片，它们重叠在一起，露在外面的总面积为 38。若 A 与 B、B 与 C 的公共部分的面积分别为 8、7，A、B、C 这三张纸片的公共部分为 3。求 A 与 C 公共部分的面积是多少？



- *3. 在长方形内画一些直线，已知边上有三块面积分别为 13、35、49，图中的数据表示所在的小块面积，则图中的阴影部分的面积为 _____。



- *4. 已知 $ABCD$ 是一个正方形，几块阴影部分的面积如下图所示，则四边形 $BMQN$ 的面积为_____。



组

三

*数论中的容斥问题

- *1. 有一根长为 180 厘米的绳子，从一端开始每隔 3 厘米做一记号，每隔 4 厘米也做一记号，然后在标有记号的地方剪断。问绳子共被剪成了多少段？
- **2. 50 名同学面向老师站成一行。老师先让大家从左至右按 $1, 2, 3, \dots, 49, 50$ 依次报数；再让报数是 4 的倍数的同学向后转，接着又让报数是 6 的倍数的同学向后转。问现在面向老师的同学还有多少名？

***3. 在 $1 \sim 1000$ 这 1000 个自然数中，不能被 2、3、5 中任何一个数整除的数有多少个？

***4. 在游艺会上，有 100 名同学抽到了标签分别为 $1 \sim 100$ 的奖券，按奖券标签号发放奖品的规则如下：

- (1) 标签号为 2 的倍数，奖 2 支铅笔；
- (2) 标签号为 3 的倍数，奖 3 支铅笔；
- (3) 标签号既是 2 的倍数，又是 3 的倍数可重复领奖；
- (4) 其他标签号均奖 1 支铅笔。

那么游艺会为该项活动准备的奖品铅笔共有多少支？

***5. 2015 盏亮着的电灯，各由一个拉线开关控制，按顺序编号为 $1, 2, \dots, 2015$ 。将编号为 2 的倍数的灯的拉线各拉一下，再将编号为 3 的倍数的灯的拉线各拉一下，最后将编号为 5 的倍数的灯的拉线各拉一下，拉完后亮着的灯数为_____盏。

- ***6. 某玩具城有一楼梯, 大约有几十级, 肯定不到一百级. 4 位小朋友阿克赛、巴顿、克林、杜邦一起玩游戏. 游戏开始后, 若同一级台阶被踩 4 下, 则台阶呈红色; 踩 3 下, 则呈黄色; 踩 2 下, 呈绿色; 踩 1 下, 呈蓝色. 若 4 人下楼梯时, 阿克赛一步下 2 级台阶, 巴顿一步下 3 级台阶, 克林一步下 4 级台阶, 而杜邦的本事最大, 竟然一步能下 5 级台阶. 下来后发现, 呈红色的台阶仅在最高处和最低处. 现在, 楼梯上呈蓝色的台阶有几级?



家庭作业

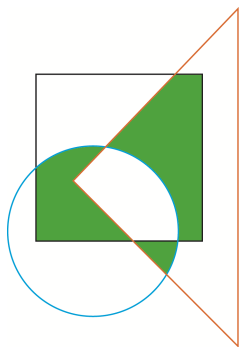
1. 一个班有学生 42 人, 参加体育代表队的有 30 人, 参加文艺代表队的有 25 人, 并且每个人至少都参加了一队, 这个班两队都参加的有多少人?
2. 某班 58 人, 参加数学竞赛的有 29 人, 参加语文竞赛的 28 人, 如果两科都没参加的有 25 人, 则同时参加两科的有多少人?



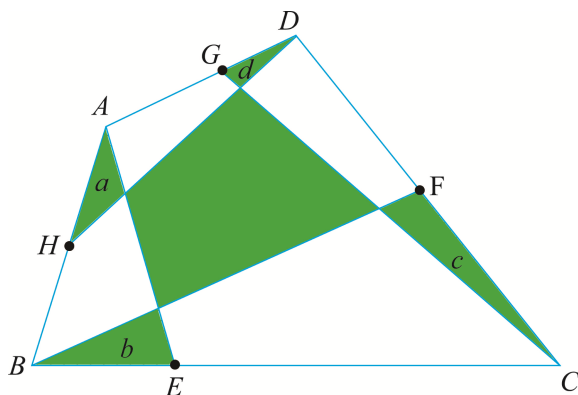
3. 育才小学举办学生美术作品展览，学校的橱窗里展览了各个年级学生的作品，其中有 22 幅不是四年级的，有 26 幅不是五年级的，四、五年级的展览作品共有 12 幅，问其他年级的展览作品共有多少幅？

4. 在 1 ~ 100 的自然数中，既不是 3 的倍数也不是 5 的倍数的数有多少个？

5. 如下图所示，三角形纸板、正方形纸板、圆形纸板的面积相等，都等于 60 平方厘米，阴影部分的面积总和是 40 平方厘米，3 张板盖住的总面积是 100 平方厘米，3 张纸板重叠部分的面积是多少平方厘米？



6. 在四边形 $ABCD$ 中, E 、 F 、 G 、 H 分别是四边的中点, 分别连接 AE 、 BF 、 CG 、 DH , 已知图中四个角上的阴影小三角面积分别为 a 、 b 、 c 、 d , 求中间阴影四边形的面积.



学习笔记



第二讲

认识质数、合数



预 习



知识 GPS

(1) 本讲内容

- A. 质数、合数的基本概念
- B. 判定质数的方法
- C. 与特殊质数 2 的特性相关的应用

(2) 前铺知识

- | | |
|---------------|----------|
| A. 数的整除特征 (一) | (五年级·秋季) |
| B. 数的整除特征 (二) | (五年级·秋季) |
| C. 奇偶性 (一) | (二年级·秋季) |
| D. 奇偶分析 (二) | (四年级·春季) |

(3) 后续知识

- | | |
|----------|----------|
| A. 因数 | (五年级·春季) |
| B. 分解质因数 | (五年级·春季) |



智慧之路

- A. 见质数想 2, 见 2 想奇、偶分析
B. 分类说明问题



课前加油站

- (1) 动画：质数与合数。
(2) 下面是主试委员会为第六届“华杯赛”写的一首诗：

美少年华朋会友，幼长相亲同切磋；
杯赛联谊欢声响，念一笑慰来者多；
九天九霄志凌云，九七共庆手相握；
聚起华夏中兴力，同唱移山壮丽歌。

请你将诗中 56 个字从第 1 行左边第一字起逐行逐字编为 1~56 号，再将号码中的质数由小到大找出来，将它们对应的字依次排成一行，组成一句话，请写出这句话。

(3) 老师把一个两位质数的十位告诉了甲，个位告诉了乙。两人有如下对话：

甲：我不知道这个质数是多少。

乙：我早就知道你不可能知道。

甲：我还是不知道。

乙：我也早就知道你刚才也不可能知道。

甲：我终于知道了。

求这个数是多少。



新 课

组

一

***质数的判定方法**

1. 回答下列问题.

(1) 247 是质数吗?

(2) 在 19、197、2009 这三个数中，质数的个数是 () .
A . 0 B . 1 C . 2 D . 3

2. 自然数 N 是一个两位数，它是一个质数，而且 N 的个位数字与十位数字都是质数．问这样的自然数有多少个？

3. 哥德巴赫猜想是：“每个大于 2 的偶数都可以表示成两个质数之和”．问 168 是哪两个两位数的质数之和，并且其中一个的个位数字是 1？

4. 用 2、3、4、5 中的三个数能组成哪些三位质数？

5. 有这样的质数，它分别加上 10 和 14 仍为质数，你会求这个质数吗？

6. 由 1、2、3、4、5、6、7、8、9 这九个数字组成的九位数是质数吗？

*7. 111111121111111 是质数还是合数？

*8. 用 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 这 9 个数字组成质数，如果每个数字都要用到并且只能用一次，那么这 9 个数字最多能组成多少个质数？



*9. 如果 $P+1$ 为质数，且 $P+6$ 为质数，则 P^2+6 ， P^3+6 ， \dots ， $P^{2016}+6$ 中有多少个质数？

**10. 有些三位数，它的各位数字之积为质数，这样的三位数最小是几？最大是几？

**11. 万尼亚想了一个三位质数，各位数字都不相同。如果个位数字等于前两位数字的和，那么这个数是几？

**12. 将 50 分拆成 10 个质数的和，要求其中最大的质数尽可能大，则这个最大的质数是多少？



数字小魔术

新年联欢会上，同学们一致要求教数学的王老师出一个节目。王老师微笑着走到讲台前说：“我给你们表演一个数字魔术吧！”说完，王老师拿出一叠纸条，发给每人一张，并神秘地说：“由于我教你们数学，所以你们脑子里的数也听我的话。不信，你们每人独立地在纸条上写上任意 4 个自然数（不重复写），我保证能从你们写的 4 个数中，找出两个数，它们的差能被 3 整除。”

王老师的话音一落，同学们就活跃起来。有的同学还说：“我写的数最调皮，就不听王老师的话。”不一会儿，同学们都把数写好了，但是当同学们一个个念起自己写的 4 个数时，奇怪的事果真发生了。同学们写的数还真听王老师的话，竟没有一个同学写的数例外，都让王老师找出了差能被 3 整除的两个数。同学们，你们知道王老师数字小魔术的秘密吗？

组二

1. 最小的质数是_____。最小的合数是_____。
2. 有三个质数 x 、 y 、 z ，若 $x + y = z$ ，则三个质数中最小的是_____。
3. 两个质数之和为 39，求这两个质数的乘积是多少？
4. 7 个连续质数从大到小排列是 a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 f 、 g ，已知它们的和是偶数，那么 d 是多少？

5. 当 p 和 p^3+5 都是质数时, $p^5+5=$ _____.

**6. 如果 a, b 均为质数, 且 $3a+7b=41$, 则 $a+b=$ _____.

**7. 三个不同的质数和为 50, 那么这三个质数的积最大是多少?

***9. a, b, c 都是质数, 如果 $(a+b)(b+c)=342$, 那么 $b=$ _____.

***10. 求三个质数, 使它们的积为它们的和的 5 倍.



家庭作业

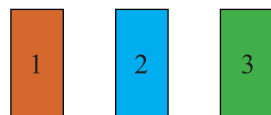
1. 两个质数的和是 99, 这样的质数有多少组?

2. A, B, C 为 3 个小于 20 的质数, $A+B+C=30$, 求这 3 个质数.

3. 已知 3 个不同质数的和是最小的合数的完全平方, 求这 3 个质数的乘积?

4. 三个质数 p, q, r , 如果 $p > q > 1$, $p + q = r$, 那么 p 是多少?

5. 有三张卡片, 在它们上面各写有一个数字 (如下图所示). 从中抽出一张、两张、三张, 按任意次序排起来, 可以得到不同的一位数、两位数、三位数. 请你将其中的质数都写出来.





学习笔记



第三讲

因数



预 习



知识 GPS

(1) 本讲内容

- A. 求任一整数因数的个数
- B. 求任一整数的所有因数的和
- C. 因数灵活运用题

(2) 前铺知识

- | | |
|--------------|----------|
| A. 数的整除特征(一) | (五年级·秋季) |
| B. 数的整除特征(二) | (五年级·秋季) |
| C. 加乘原理 | (四年级·暑期) |

(3) 后续知识

- | | |
|-------------|----------|
| 最大公因数与最小公倍数 | (五年级·春季) |
|-------------|----------|



智慧之路

解题方法：枚举法

数学思想：数形结合、分类思想



课前加油站

动画：拓荒五子棋、倍数游戏



新 课

组

一

1. 求 720 的：

(1) 因数个数；

(2) 奇因数个数；

(3) 偶因数个数；

(4) 因数和；

(5) 因数积 .

2. 105 的因数共有几个 ?

3. 360 的因数有多少个 ? 这些因数的和是多少 ?

4. 筐中有 60 个苹果, 将它们全部都取出来, 分成偶数堆, 使得每堆的个数相同. 问有多少种分法 ?

5. 由不小于 30 人、不大于 50 人的学生围成一个圆圈, 由某人开始从 1 连续报数. 如果报 30 和 198 是同一个人时, 请问: 这批学生一共有多少人 ?

**6. 观察下表, 依据表格数据排列的规律, 2015 在表格中出现的次数有 _____ 次 .

1	2	3	4	...
2	4	6	8	...
3	6	9	12	...
4	8	12	16	...

组 二

- *1. 1000 以内，只有 3 个因数的最大的自然数是_____。

- *2. 恰有 20 个因数的最小自然数是_____。

- *3. 写出 360 ~ 630 的自然数中有奇数个因数的数。

- *4. 100 以内有 10 个因数的最小的自然数是_____，它的所有因数的和是_____。

- **5. 求不大于 200 且恰有 10 个不同因数的所有的自然数。

- **6. 在三位数中，恰好有 9 个因数的数有多少个？

- **8. 设 2010 ! 的因数和为 A , 2011 ! 的因数和为 B , 那么 $B \div A =$ _____。



完全数

如果整数 a 能被 b 整除，那么 b 就叫做 a 的一个因数。例如，1、2、3、4、6 都是 12 的因数。有一种数，它恰好等于除去它本身以外的一切因数的和，这种数叫做完全数。例如，6 就是最小的一个完全数，因为除 6 以外的 6 的因数是 1、2、3，而 $6=1+2+3$ 。

你能在 20 ~ 30 之间找出第二个完全数吗？



***1. 将一个数的所有的因数两两求和，在所有的和中，若最小的是 4，最大的是 180，则这个数是_____。

***2. 一个自然数，它的最大的因数和次大的因数的和是 111，这个自然数是_____。

***3. 一个两位数有 6 个因数，且这个数最小的 3 个因数之和为 10，那么此数是多少？





- 



学习笔记



第四讲

分解质因数



预 习



知识 GPS

(1) 本讲内容

- A. 分解质因数基本概念
- B. 分解质因数的方法
- C. 分解质因数的妙用：求因数的个数、求因数的和、求最简真分数的个数、求积末尾 0 的个数
- D. 分解质因数巧解应用题

(2) 前铺知识

- A. 质数合数 (五年级·春季)
- B. 因数 (五年级·春季)

(3) 后续知识

- 最大公因数、最小公倍数 (五年级·春季)



聪慧之路

解题方法：有序与无序、见积分解质因数

数学思想：分类思想



课前加油站

动画：分解质因数之水管修理工



新 课

组

一

***分解质因数基本概念**

***分解质因数的方法**

***分解质因数的妙用**

1. 把 120 分解质因数 .

2. 边长为自然数，面积为 165 的形状不同的长方形共有多少个？
3. 有两个两位数的积是 3927，这两个数的和是多少？
4. 一只筐里装有 100 个苹果，如果不一次拿出，也不一个一个地拿出，但每次拿出的个数都要相等，并且最后一次正好拿完。问共有多少种拿法？
5. 用 120 个大小相同的正方形拼成一个长方形，共有多少种不同的拼法？
6. 3 个连续偶数的乘积是 960，这 3 个数的和是多少？
7. 用一个两位数除 1170，余数是 78，求这个两位数。

8. 某班同学在班主任陈老师的带领下去福利院擦玻璃. 同学们恰好能平均分成 4 组, 并且师生擦的块数同样多. 已知师生一共擦了 102 块玻璃, 平均每人擦了多少块玻璃?
9. 王老师带着班上同学 (不超过 100 人) 去植树, 学生按人数正好可以平均分成三组. 已知师生共植了 154 棵树, 老师与学生每人植的树一样多, 并且不超过 10 棵. 问共有多少学生? 每人植多少棵树?
10. 有八个数 693, 35, 48, 28, 175, 108, 363, 165, 把它们分为两组, 使两组数的积相等.
11. 大毛、二毛、三毛、小明四个人, 他们的年龄一个比一个大 2 岁, 他们四个人年龄的乘积是 48384. 问他们四个人的年龄各是几岁?



组 二

***求积末尾 0 的个数**

- *1. 要使四个数的积 $135 \times 1925 \times 486 \times (\quad)$ 结果的最后五位都是零，括号中的数最小填入几？
- *2. 要使 $75 \times (\quad) \times 184 \times 125 \times 60$ 的乘积的尾数有 7 个连续的零，括号里最少应该填多少？
- *3. $100!$ 积的末尾有多少个零？
- **4. 已知从 1 开始连续 n 个自然数相乘， $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$ ，乘积的尾部恰有 25 个连续的零，那么 n 的最大值是_____。
- **5. 如果 $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (\quad)$ 这个乘积的末尾有 28 个连续的零，
(\quad) 内最大填多少？

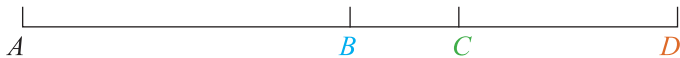


一只绑在树干上的小狗，贪吃地上的一根骨头，但绳子不够长，差了 5 厘米。你能教小狗用什么办法抓到骨头吗？



*分解质因数的运用

- **1. 如下图所示，点 B 是线段 AD 的中点，由 A, B, C, D 四个点所构成的所有线段的长度均为整数，若这些线段的长度之积为 10500，则线段 AB 的长度是_____。

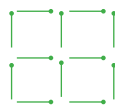


- **2. $\quad \times (\quad + \quad) = 209$ ，在 \quad 、 \quad 、 \quad 中各填一个质数，使上面算式成立。

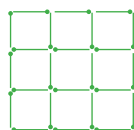


- ***3. 有 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 九张牌，甲、乙、丙各拿了三张。甲说：“我的三张牌的积是 48。”乙说：“我的三张牌的和是 15。”丙说：“我的三张牌的积是 63。”问他们各拿了哪三张牌？

- ***4. 如下图所示，摆放 2×2 的“4 宫格”要用 12 根火柴棍；摆放 3×3 的“9 宫格”要用 24 根火柴棍。小明用 1300 根火柴棍，恰好摆放成一个 $m \times m$ 的“ m^2 宫格”，问 $m = ?$



4宫格



9宫格

- ***5. 蓝精灵王国的 A、B 两地的距离等于 2010 米。国王派 1 号信使从 A 地出发以 1 米/分的速度向 B 地送信。一分钟后又派出第 2 号信使使用比 1 号信使快 1 米/分的速度向 B 送信，一般地，第 k 分钟后又派出第 $k+1$ 号信使使用比第 k 号信使快 1 米/分的速度向 B 送信，……，直到第 2009 分钟后，派出第 2010 号信使使用比第 2009 号快 1 米/分的速度向 B 送信。已知每个信使都是匀速行进。问其中哪些号的信使能同时到达 B 地？



家庭作业

1. 三个连续自然数的乘积是 210，求这三个数是多少？

2. 有四个孩子，恰好一个比一个大 1 岁，他们年龄相乘的积等于 3024，那么他们各多少岁？

3. 已知 5 个人都属牛，它们年龄的乘积是 589225，那么他们年龄的和为多少？

4. 把 40，44，45，63，65，78，99，105 这八个数平分成两组，使每组四个数的乘积相等。

5. 李老师带领一部分同学去植树，同学们正好可以平均分成 3 组。如果师生每人植树的棵树一样多，则共植了 155 棵树。问平均每人植树多少棵？



6. 不计算，判断一下， $18 \times 925 \times 34 \times 475 \times 60$ 的积的末尾共有多少个连续的0？



学习笔记



第五讲

数形结合解题



预 习



知识 GPS

(1) 本讲内容

- A. 计算公式中的数形结合
- B. 数形结合解决应用题

(2) 前铺知识

- | | |
|---------------|----------|
| A. 几何(一) | (三年级·春季) |
| B. 几何(二) | (三年级·春季) |
| C. 末路等于来路和(一) | (三年级·春季) |
| D. 末路等于来路和(二) | (四年级·暑期) |

(3) 后续知识

- | | |
|-----------|----------|
| A. 倍数解行程 | (六年级·暑期) |
| B. 几何(十二) | (六年级·暑期) |



智慧之路

解题方法：画图

数学思想：数形结合思想



课前加油站

(1) $0.33 < () < 0.35$ ，括号内的小数有多少个？并证明结果。

(2) 看到 a^2 ，你想到了什么？

(3) 看到 ab ，你想到了什么？



新 课

组

一

*用数形结合证明公式

$$(a+b)c=ac+bc$$

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$** 1+3+5+7+9+\dots+(2n-1)=n^2$$

$$*** 1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+n^2 = n(n+1)(2n+1) \div 6$$

组

二

*数形结合解题

1. 有两组数：A 组为 0.6、0.9、1.5，B 组为 3.2、4.3、2.5。
 (1) 从每一组数中选一个数，再相乘会得到多少个积？

- (2) 求所有的积的和是多少？（用小学知识说明）

2. 全班同学去划船，如果减少一条船，每条船正好坐 9 人，如果增加一条船，每条船正好坐 6 人。问全班有多少人？

3. 小旭有 10 分和 20 分的邮票共 18 张，面值 2.80 元。问两种邮票各多少张？

4. 甲自行车每小时行 15 千米，乙自行车每小时行 12 千米。乙先行 1.5 小时，问几小时后甲可追上乙？

- *5. 一个学生从家到学校上课，先用每分钟 80 米的速度走了 3 分钟，发现这样走下去将迟到 3 分钟，于是他就改用每分钟 110 米的速度前进，结果提前了 3 分钟。问这个学生家到学校有多远？



猜数学名词

- | | | |
|----------|------------|-----------|
| 1. 互盼； | 2. 再见了，妈妈； | 3. 边搬边数； |
| 4. 不带零头； | 5. 失去联络； | 6. 并肩前进； |
| 7. 老地方见； | 8. 五四三二一； | 9. 各份一样多。 |



1. 什么是柳卡图？柳卡图可以解决什么问题？

- **2. 每天中午有一条轮船从哈佛开往纽约，且每天同一时刻也有一艘轮船从纽约开往哈佛。轮船在途中均要航行七天七夜。试问：某条从哈佛开出的轮船在到达纽约前（途中）能遇上几艘从纽约开来的轮船？



***3. 有一路电车自甲站开往乙站，每 5 分钟发一趟，全程要 15 分钟。有一人从乙站骑自行车沿电车路线去甲站，出发时恰有一辆电车到达乙站，在路上他又遇到 10 辆迎面开来的电车才到甲站，到站时恰好有一辆电车从甲站开出。问他从乙站到甲站共用了多少分钟？

***4. 甲、乙两名工人做机器零件，每天甲比乙多做 10 个。现在甲工作 15 天，乙工作 12 天，共做出 1500 个零件。问甲、乙两人每天各做多少个零件？

***5. 幼儿园有三个班，甲班比乙班多 4 人，乙班比丙班多 4 人，老师给小孩分枣，甲班每个小孩比乙班每个小孩少分 3 个枣。乙班每个小孩比丙班每个小孩少分 5 个枣，结果甲班比乙班总共多分了 3 个枣，乙班比丙班总共多分了 5 个枣，问三个班总共分了多少个枣？

***6. 甲队和乙队进行一场足球赛的最终比分是 4 : 2 , 已知甲队先进一球 , 而乙队在比赛过程中始终没有领先过 , 那么两队的入球次序共有多少种不同的可能 ?

***7. 两人相约零点到一点在某地会面 , 先到者等候另一个人 10 分钟 , 过时就离开 . 假设两人等可能在零点到一点内任一时刻到达 , 求两个人能会面的概率 .



家庭作业

1 . $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

2 . 用一元钱买 8 分邮票和 4 分邮票共 17 张 . 问这两种邮票各买了多少张 ?



3. 笼中共有 30 只鸡和兔，数一数足数正好是 100 只，问鸡、兔各多少只？

4. 学校将某个班的学生分到各个宿舍，如果每间宿舍安排 5 个人，那么还有 10 个人没地方住；如果每间宿舍安排 6 个人，那么还有 3 个人没地方住，请问一共有多少间宿舍？多少个学生？

5. 甲、乙两人在同一条路上前后相距 9 千米，他们同时向同一个方向前进，甲在前，以每小时 5 千米的速度步行；乙在后，以每小时 10 千米的速度骑自行车追赶甲，问几小时后乙能追上甲？



学习笔记

第六讲

最大公因数与最小公倍数



预 习



知识 GPS

(1) 本讲内容

- A. 最大公因数和最小公倍数的求法
- B. 最大公因数和最小公倍数的应用

(2) 前铺知识

- A. 因数 (五年级·春季)
- B. 质数、合数 (五年级·春季)
- C. 分解质因数 (五年级·春季)

(3) 后续知识

- A. 余数问题 (五年级·春季)
- B. 分数简算 (六年级·秋季)



智慧之路

解题方法：

- A. 列举
- B. 短除式
- C. 分解质因数
- D. 辗转相减



课前游戏

- A. 巧对齿轮
- B. 雪人



新 课

组

一

***求最大公约数的方法：枚举、分解质因数、短除**

***求最小公倍数的方法：枚举、分解质因数、短除、大数求倍法**

1. 18 的因数：_____

24 的因数：_____

18 和 24 的公因数：_____

18 和 24 的最大公因数：_____

2. 6 的倍数：_____

9 的倍数：_____

6 和 9 的公倍数：_____

6 和 9 的最小公倍数：_____

3. 计算出下列各组数的最大公因数和最小公倍数.

(1) 2, 5 5, 8 11, 14

(2) 2, 4 10, 20 17, 51

(3) 10, 12 15, 18 221, 187

4. 计算出下列各组数的最大公因数和最小公倍数.

(1) 3, 4, 5 (2) 9, 12, 15

(3) 4, 6, 9 (4) 20, 30, 45

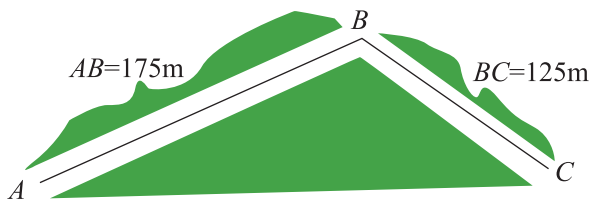


组 二

*最大公因数、最小公倍数的简单运用

1. 一个教室长 450 厘米，宽 330 厘米。现计划用方砖铺地，问需要用边长最大为多少厘米的方砖多少块（整块），才能正好把教室间地面铺满？
2. 有 3360 个桃、2520 个杏、2100 个梨，用这些水果最多可以分成多少份同样的礼物？在每份礼物中，三样水果各多少？
3. 一个长方体长 2.7 分米，宽 1.8 分米，高 1.5 分米，要把它切成大小相等的正方体木块，不许有剩余。问正方体的棱长最大是多少分米？

- *4. 如下图所示, 某公园有两段路, $AB = 175$ 米, $BC = 125$ 米, 在这两段路上安装路灯, 要求 A 、 B 、 C 三点各设一个路灯, 相邻两个路灯间的距离都相等, 则在这两段路上至少要安装路灯 _____ 个.



5. 小明和小军每人隔不同的天数到图书馆去看书, 小明每 6 天去一次, 小军每 8 天去一次. 这个星期天, 他们两个在图书馆相遇, 则至少再过多少天, 他们又在图书馆相遇?
6. 同学们排队做操, 无论是每行排 6 人, 还是每行排 8 人或 12 人, 都正好排满, 没有剩余. 问至少有多少人做操?
7. 用长 6 厘米、宽 4 厘米的长方形瓷砖拼成一个最小的正方形, 要用这样的瓷砖多少块?

8. 一排电线杆，每相邻两根之间的距离为 45 米，现在要改为 60 米。如果起点的一根不动，则至少再隔多远又有一根不需要移动？

9. 一对齿轮，分别有 60 个齿和 80 个齿，其中互相咬合的任意一对齿从第一次相接到再次相接，两个齿轮各要转动多少圈？

**10. 动物园的饲养员给三群猴子分花生，如只分给第一群，则每只猴子可得 12 粒；如只分给第二群，则每只猴子可得 15 粒；如只分给第三群，则每只猴子可得 20 粒。那么平均分给三群猴子，每只猴子可得多少粒花生？

**11. 有一个电子闹钟，每走 9 分钟亮一次灯，每到整点响一次铃。中午 12 点整，电子钟响铃又亮灯。则下一次既响铃又亮灯是几点钟？



- ***12. 有一个长方形棋盘，每个小方格的边长都是1，长有200格，宽有120格（如下图所示）。纵横线交叉的点称为格点，连接 A, B 两点的线段共经过多少个格点（包括 A, B 两点）？



- ***13. 将两个不同的自然数中较大的数换成这两个数的差，称为一次操作。如对18和42连续进行这样的操作，则有18, 42 → 18, 24 → 18, 6 → 12, 6 → 6, 6, 直到两数相同为止。试给出和最小的两个五位数，按照以上操作，最后得到的相同的数是15，这两个五位数是_____与_____。



两根火柴

小机灵用两根火柴，没有折断，就在桌上拼了一个正方形。他是怎么拼的？

组 三

***最大公因数、最小公倍数的运用**

***1. 两个数的最大公因数是 6，最小公倍数是 144，求这两个数。

***2. 两个数的最大公因数是 18，最小公倍数是 180，两个数的差是 54，求这两个数的和。

***3. 两个自然数的和是 60，它们的最大公因数与最小公倍数的和是 84，求这两个数。

***4. 两个自然数的和是 72，它们的最大公因数与最小公倍数的和是 216，这两个数分别是多少？

***5. 长度为 L 的一条木棍, 分别用红、蓝、黑线将它等分为 8、12 和 18 段, 在各画线处将木棍锯开, 问一共可以得到多少段木棍? 其中最短的一段的长是多少?

***6. 100 个非 0 自然数的和等于 2006, 那么它们的最大公因数最大可能值是多少?



家庭作业

1. 计算出下列各组数的最大公因数和最小公倍数.

(1) 7, 8

(2) 13, 26

(3) 48, 56

2. 把一张长 1.35 米、宽 1.5 米的纸裁成同样大小的正方形纸块, 而没有剩余, 问能裁成最大的正方形纸块的边长是多少?

3. 一种长方形卡片长 25cm、宽 15cm，用这样的卡片拼成一个正方形最少需要多少块？

4. 加工某种机器零件，要经过三道工序，第一道工序每名工人每小时可完成 6 个零件，第二道工序每名工人每小时可完成 10 个零件，第三道工序每名工人每小时可完成 15 个零件。要使加工生产均衡，三道工序最少共需要多少名工人？（假设这三道工序可以同时进行）

5. 教师节那天，某校工会买了 320 个苹果、240 个橘子、200 个鸭梨，用来慰问退休的教职工，问用这些果品，最多可以分成多少份同样的礼物（同样的礼物指的是每份礼物中苹果、橘子、鸭梨的个数彼此相等）？在每份礼物中，苹果、橘子、鸭梨各多少个？



学习笔记

第七讲

完全平方数



预 习



知识 GPS

(1) 本讲内容

- A. 认识完全平方数
- B. 完全平方数的尾数特征
- C. 完全平方数的因数个数
- D. 完全平方数的余数性质

(2) 前铺知识

因数和倍数 (五年级·春季)

(3) 后续知识

数论综合 (六年级·秋季)



智慧之路

不完全归纳法



课前加油站

(1) 把 150 分解质因数。

(2) 120 有多少个因数？25 有多少个因数？

(3) $1^2=$ $2^2=$ $3^2=$ $4^2=$ $5^2=$
 $6^2=$ $7^2=$ $8^2=$ $9^2=$ $10^2=$



新 课

组 一

***完全平方数的定义：**若一个数能表示成某个自然数的平方的形式，则称这个数为完全平方数。完全平方即用一个整数乘以自己，如： $1^2=1 \times 1$ ， $2^2=2 \times 2$ 都是完全平方数。

1. 列举 $1 \sim 100$ 以内的完全平方数，并观察完全平方数个位数字有哪些特征。

2. 判断下列哪些数是完全平方数。

100	20	121	8	144
256	287	1000	375	

3. 1016 与正整数 a 的乘积是一个完全平方数，则 a 的最小值是_____。

4. 已知自然数 n 满足： $12!$ 除以 n 得到一个完全平方数，则 n 的最小值是_____。

*5. $1+1 \times 2+1 \times 2 \times 3+1 \times 2 \times 3 \times 4+1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5+1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$ ，这个算式的得数能否是某个数的平方？

**6. 试证不论 a 、 b 是什么整数， $35a-45b+2$ 都不可能是完全平方数。

组

二

*完全平方数的因数特点

1. 写出下列各数的因数个数。

12 的因数个数：_____，15 的因数个数：_____，

36 的因数个数：_____，144 的因数个数：_____。

2. 写出 360 ~ 630 的自然数中有奇数个因数的数。

3. 1000 以内，只有 3 个因数的最大的自然数是_____。

4. 2016 名同学编为 1 ~ 2016 号面向南站成一排。第 1 次全体同学向后转（转后所有的同学面朝北）；第 2 次编号为 2 的倍数的同学向后转；第 3 次编号为 3 的倍数的同学向后转；……；第 2016 次编号为 2016 的倍数的同学向后转。这时，面向南的同学有_____名。



划拳是我国古老的劝酒习俗，劝酒这种习俗不好，但是不喝酒，光划拳则是一种有意思的数学游戏。

两个人划拳，每人同时伸出一只手，一只手有 5 个指头，任意出几个指头，代表 1~5 五个数字，不出指头则代表零。两人同时出手，同时喊数，谁喊的数是二人指头数的和，谁就算胜。

你可能认为，这完全没有规律，双方胜的机会相等。其实仔细分析，还是有窍门的。

我们来看二人手指的组合，共有以下 36 种形式：

甲：0 0 0 0 0 0

乙：0 1 2 3 4 5

和：0 1 2 3 4 5

甲：1 1 1 1 1 1

乙：0 1 2 3 4 5

和：1 2 3 4 5 6

.....

甲：5 5 5 5 5 5

乙：0 1 2 3 4 5

和：5 6 7 8 9 10

从这 36 种组合形式中可以看到：和为 0、10 的各一种，和为 1、9 的各两种，和为 2、8 的各三种，和为 3、7 的各四种，和为 4、6 的各五种，和为 5 的共六种。由此可见，如果喊 5，胜的机会最多。不信你试试看。

组

三

*完全平方数的应用

1. 我们知道： $9=3 \times 3$ ， $16=4 \times 4$ ，这里，9、16 叫做“完全平方数”，在前 300 个自然数中，去掉所有的“完全平方数”，剩下的自然数的和是多少？

2. 如果一个两位数与它的反序数（如 52 的反序数是 25）的和是一个完全平方数，那么就称它为“灵巧数”。请写出所有的“灵巧数”。

3. 一个四位数是一个完全平方数，并且前两位数字相等，后两位数字相等，求这个四位数。

- **4. $1, 11, 111, 1111, \dots$ ，这些数中有多少个是完全平方数？

- ***5. 一个数是由 2016 个“4”组成的多位数，即 $444\dots444$ ，这个数是不是某个自然数的平方？如果是，请写出来；如果不是，请说明你的理由。



家庭作业

1. 判断下列哪些数是完全平方数。

200

25

2025

441

2. 已知 $3528 \times a$ 恰是自然数 b 的平方数， a 的最小值是_____。

3. $3+3 \times 4+3 \times 4 \times 5+3 \times 4 \times 5 \times 6+3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7$ 的结果是不是完全平方数？

4. 从 200 ~ 1800 的自然数中有奇数个约数的数有多少个？

5. 一隧道内有 2016 盏电灯，标号依次为 1、2、3、4、...、2016，有标号依次为 1、2、3、4、...、2016 的 2016 个人从该隧道内依次通过，每人把标号为自己整数倍的灯的开关拉一下，当这 2016 个人从隧道内通过后，还有多少灯是亮着的？

6. 324、4234 这两个数中是否有完全平方数，如果有，它是谁的平方？



学习笔记



第八讲

几何（九）



预 习



知识 GPS

（1）本讲内容

- A. 认识长方体和正方体
- B. 长方体和正方体画图
- C. 原来加减变化
- D. 三视图求表面积

（2）前铺知识

- A. 周长 (三年级·秋季)
- B. 几何（一） (三年级·春季)

（3）后续知识

- 几何（十） (六年级·暑期)



智慧之路

- A. 整体思想
- B. 原来加减变化



课前游戏

(1) 千钧一发（游戏）

(2) 一个长方形周长是 24 分米，沿长方形的长剪一刀、宽剪一刀得到 4 个长方形，求这 4 个长方形的周长和。



新 课

组

一

*长方体、正方体的基础知识

1. 一个长方体，长为 a ，宽为 b ，高为 h 。
 - (1) 长方体有_____个顶点，有_____条棱，有_____个面。
 - (2) 长方体有_____个长，_____个宽，_____个高。
 - (3) 长方体相对的面面积_____，前面面积为_____，底面面积为_____，左

侧面积为____，那么表面积为____。

(4) 长方体的体积为____，还可以写为____。

2. 一个长方体的长、宽、高分别是 10 分米、6 分米、8 分米，那么这个长方体的表面积为____，体积为____；一个正方体的棱长是 6 分米，那么这个正方体的表面积为____，体积为____。

组二

*立体画图

1. 画一个长方体。
2. 画一个正方体。
3. 画两个正方体拼成一个长方体。
4. 画四个小正方体拼一个长方体。
5. 画一个长方体的长增加 2 厘米。

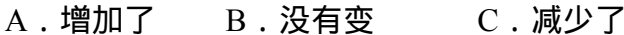


11. 画一个正方体中间挖去一个小正方体.

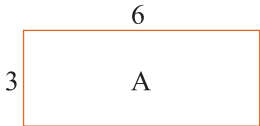


D. 27

- A . $3ab$ B . $3abh$ C . $ab(3+h)$



- 放水 升.



- 同，并且都是整厘米数，则长方体的体积等于 立方厘米．

9. 一个长方体的各条棱长的和是 96 厘米，并且它的长是宽的 2 倍，高与宽相等，那么这个长方体的体积是_____立方厘米。

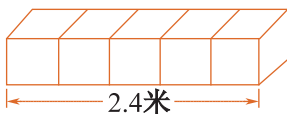


十名公安干警，为执行任务，必须渡过河去。可是桥已被破坏，河水又深。幸好有两个小朋友驾舟玩耍，可是船太小，每次只能乘坐一个大人或两个小孩。最后，他们竟用这条小船全部过了河。你知道他们是怎样渡过去的吗？

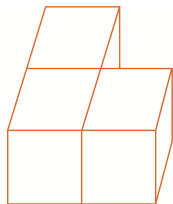
组 四

*原来加减变化

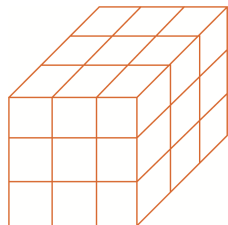
1. 把两块长 10 厘米、宽 8 厘米、高 6 厘米的长方体木块拼成一个大的长方体，表面积最多减少多少？最少减少多少？
2. 把一根长 2.4 米的长方体木料锯成 5 段（如下图所示），表面积比原来增加了 96 平方厘米。这根木料原来的体积是_____立方厘米。



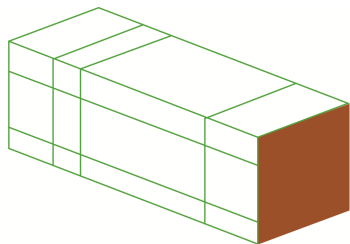
3. 有三个大小一样的正方体，将接触的面用胶粘接在一起成如下图所示的形状，表面积比原来减少了 16 平方厘米，求所成形体的体积。



4. 一个表面积为 56cm^2 的长方体切成如下图所示的 27 个小长方体，这 27 个小长方体表面积的和为 $\underline{\hspace{2cm}}\text{cm}^2$ 。



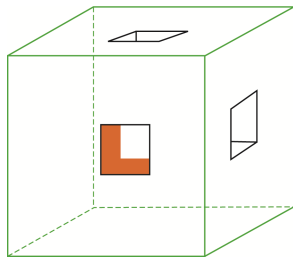
5. 一个长方体的宽和高相等，并且都等于长的一半，将这个长方体切成 12 个小长方体（如下图所示），这些小长方体的表面积之和为 600 平方分米，这个大长方体的体积是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 立方分米。



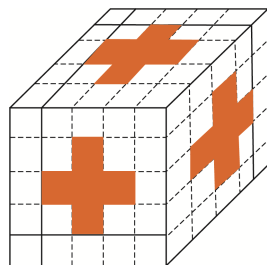
6. 一个长方体的长为 8 分米，高为 20 分米，如果沿着水平方向把它横切成 4 个小长方体，表面积就增加了 240 平方分米，则原来长方体的体积为多少立方分米？

7. 一个正方体的棱长为 3 厘米，在它的前、后、左、右、上、下各面中心各挖去一个棱长为 1 厘米的正方体做成一种玩具，求这个玩具的表面积。

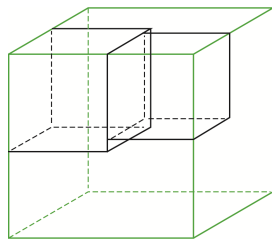
8. 如下图所示为，一个边长为 $3a$ 厘米的正方体，分别在它的前、后、左、右、上、下各面的中心位置挖去一个截面是边长为 a 厘米的正方形的长方体（都和对面打通）。如果这个镂空的物体的表面积为 2592 平方厘米，试求正方形截面 a 的边长。



9. 有一个棱长为 5cm 的正方体木块, 从它的每个面看都有一个穿透的完全相同的孔, 求这个立体图形的内、外表面的总面积.



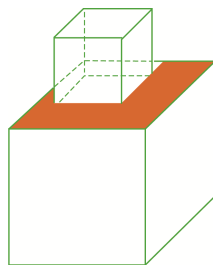
10. 一个正方体木块, 棱长是 15. 从它的八个顶点处各截去棱长分别是 1、2、3、4、5、6、7、8 的小正方体. 这个木块剩下部分的表面积最少是多少?



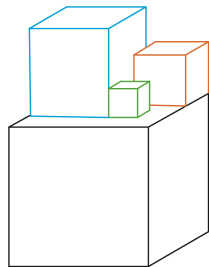
组 五

*三视图求表面积

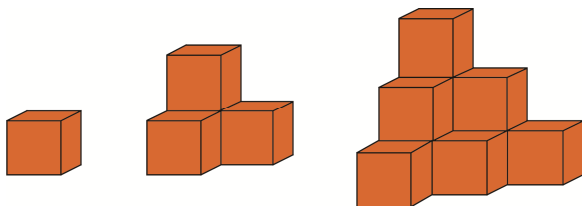
1. 如下图所示, 在一个棱长为 5 分米的正方体上放一个棱长为 4 分米的小正方体, 求这个立体图形的表面积.



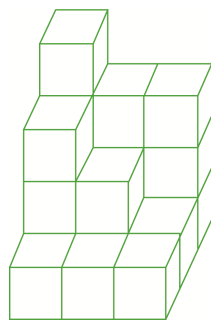
2. 如下图所示，棱长分别为 1 厘米、2 厘米、3 厘米、5 厘米的四个正方体紧贴在一起，则所得到的多面体的表面积是_____平方厘米。



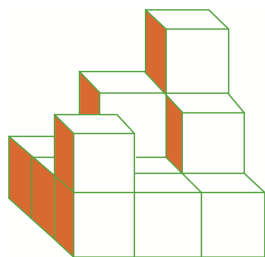
3. 边长为 1 厘米的正方体，如下图所示层层重叠放置，那么当重叠到第 5 层时，这个立体图形的表面积是多少平方厘米？



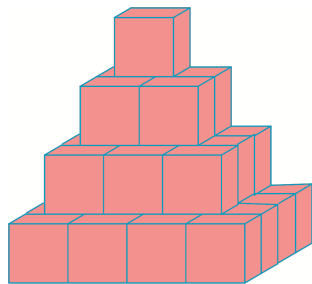
4. 把 19 个棱长为 1 厘米的正体重叠在一起，按图中的方式拼成一个立体图形，求这个立体图形的表面积。



5. 用棱长是 1 厘米的立方块拼成如下图所示的立体图形, 问该图形的表面积是多少平方厘米?



6. 有 30 个边长为 1 米的正方体, 在地面上摆成如下图所示的形式, 然后把露出的表面涂成红色. 求被涂成红色的表面积.

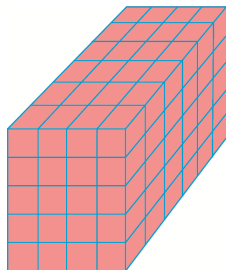


组 六

*长方体、正方体染色

1. 棱长是 5 的正方体, 如果将其表面涂成红色, 然后切成棱长是 1 的正方体. 那么其中一面、二面、三面、零面被涂成红色的小正方体各有多少块?

2. 如下图所示是 $4 \times 5 \times 6$ 长方体，如果将其表面涂成红色，那么其中一面、二面、三面、零面被涂成红色的小正方体各有多少块？

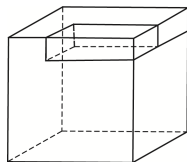


3. 棱长是 5 的正方体，如果将其 5 个面涂成红色，然后切成棱长是 1 的正方体，那么其中一面、二面、三面、零面被涂成红色的小正方体各有多少块？
4. 一个长方体的长是 12 厘米，宽是 10 厘米，高也是整厘米数，在它的表面涂满颜色后，截成棱长是 1 厘米的小正方体，其中一面有色的小正方体有 448 个，求原来长方体的体积与表面积。
5. 将一个棱长为整数分米的长方体 6 个面都涂上红色，然后把它全部切成棱长为 1 分米的小正方体，在这些小正方体中，6 个面都没有涂红色的有 12 块，仅有两个面涂红色的有 28 块，则仅有一个面涂红色的有多少块？原来长方体的体积是多少立方分米？

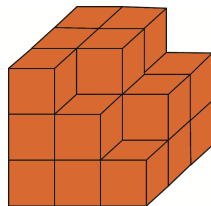


家庭作业

1. 一个长方体的长、宽、高分别是 20 分米、12 分米、16 分米, 那么这个长方体的表面积是_____, 体积是_____ ; 一个正方体的棱长是 7 分米, 那么这个正方体的表面积是_____, 体积是_____ .
2. 把三块长 10 厘米、宽 8 厘米、高 6 厘米的长方体木块拼成一个大的长方体, 表面积最多减少多少? 最少减少多少?
3. 如下图所示, 在一个棱长为 15 的立方体上截取一个长为 9、宽为 4、高为 3 的小长方体, 那么新的几何体的表面积是多少?



4. 如下图所示是由 22 个小正方体组成的立体图形, 每个小正方体的棱长是 1 厘米, 求出这个物体的表面积.



5. 棱长是 6 的正方体，如果将其表面涂成红色，然后切成棱长是 1 的正方体，那么其中一面、二面、三面、零面被涂成红色的小正方体各有多少块？



学习笔记



第九讲

典型行程（一）



预 习



知识 GPS

（1）本讲内容

- A. 沙漠探险
- B. 发车间隔

（2）前铺知识

- A. 追及问题 （四年级·秋季）
- B. 相遇问题 （四年级·秋季）

（3）后续知识

- 倍数解行程 （六年级·暑期）



智慧之路

- A. 合理安排
- B. 平均分
- C. 等量代换



课前加油站

(1) 一辆汽车和一辆卡车分别从相距 480 千米的甲、乙两地同时出发，相向而行。汽车每小时行驶 70 千米，卡车每小时行驶 50 千米。问两辆车从出发到相遇需要多少小时？

(2) 一辆汽车和一辆卡车分别从相距 480 千米的甲、乙两地同时出发，同向而行。汽车每小时行驶 70 千米，卡车每小时行驶 50 千米。问经过多长时间汽车能追上卡车？



新 课

组

一

*探险问题

1. 多人要到沙漠中探险，他们每天向沙漠深处走 20 千米，已知每人最多可携带一个人 24 天的食物和水。
- (1) 如果 2 人要到沙漠中探险、不准将部分食物存放在途中，问其中一人最远可以深入沙漠多少千米？（要求 2 人最后返回出发点）
- (2) 如果 3 人要到沙漠中探险、不准将部分食物存放在途中，问其中一人最远可以深入沙漠多少千米？（要求 3 人最后返回出发点）
- (3) 如果 5 人要到沙漠中探险、不准将部分食物存放在途中，问其中一人最远可以深入沙漠多少千米？（要求 5 人最后返回出发点）



（4）如果 2 人要沙漠中探险、允许将部分食物存放在途中，问其中一人最远可以深入沙漠多少千米？（要求 2 人最后返回出发点）

（5）如果 3 人要沙漠中探险、允许将部分食物存放在途中，问其中一人最远可以深入沙漠多少千米？（要求 3 人最后返回出发点）

（6）如果 3 人要沙漠中探险、允许将部分食物存放在途中，问其中一人最远可以穿过多少千米的沙漠？

2. 2 人要沙漠中探险，每天能向沙漠深处走 20 千米，已知每人最多可携带一个人 21 天的食物和水。如果允许将部分食物存放在途中，第二人回来的速度是计划的 2 倍，问其中一人最远可以深入沙漠多少千米？（要求 2 人最后返回出发点）

3. 有 5 位探险家计划横穿沙漠. 他们每人驾驶一辆吉普车, 每辆车最多能携带可供一辆车行驶 315 千米的汽油. 显然, 5 个人不可能共同穿越 500 千米以上的沙漠. 于是, 他们计划在保证其余车完全返回出发点的前提下, 让一辆车穿越沙漠, 当然实现这一计划需要几辆车相互借用汽油. 问穿越沙漠的那辆车最多能穿越多宽的沙漠?

4. 两辆汽车从同一地点同时出发, 沿同一方向同速直线行驶, 每车最多只能带 24 桶汽油, 途中不能用别的油, 每桶油可使一辆车前进 60 千米, 两车都必须返回出发地点, 但是可以不同时返回, 两车相互可借用对方的油. 为了使其中一辆车尽可能地远离出发地点, 另一辆车应当在离出发地点多少千米的地方返回? 离出发地点最远的那辆车一共行驶了多少千米? (中途不准放油)



将 3 枚黑棋子、3 枚白棋子相间地排成一行. 现在来移动棋子, 使这 6 枚棋子中同色的棋子都靠在一起. 移动的规则是, 每次只能调动相邻的 2 枚. 你最少需移动几次, 才可达到目的呢?

组

三

***发车间隔问题**

1. 某人沿着电车道旁的便道以每小时 4.5 千米的速度步行，每 7.2 分钟有一辆电车迎面开过，每 12 分钟有一辆电车从后面追过，如果电车按相等的时间间隔以同一速度不停地往返运行，问电车的速度是多少？电车之间的时间间隔是多少？

2. 某人以匀速行走在一条公路上，公路的前后两端每隔相同的时间发一辆公共汽车，他发现每隔 15 分钟有一辆公共汽车追上他；每隔 10 分钟有一辆公共汽车迎面驶来擦身而过，问公共汽车每隔多少分钟发车一辆？

3. 某人沿电车线路行走，每 12 分钟有一辆电车从后面追上，每 4 分钟有一辆电车迎面开来，假设两个起点站的发车间隔是相同的，求发车间隔。

4. 从电车总站每隔一定时间开出一辆电车，甲与乙两人在一条街上反方向步行，甲沿电车发车方向每分钟步行 60 米，每隔 20 分钟有一辆电车从后方超过自己；乙每分钟步行 80 米，每隔 10 分遇上迎面开来的一辆电车，那么电车总站每隔多少分钟开出一辆电车？

5. 从电车总站每隔一定时间开出一辆电车，甲与乙两人在一条街上沿着同一方向行走，甲每隔 10 分钟遇上一辆迎面开来的电车；乙每隔 15 分钟遇上迎面开来的一辆电车，且甲的速度是乙的速度的 3 倍，那么电车总站每隔多少分钟开出一辆电车？



家庭作业

1. 2 人要到沙漠中探险，他们每天向沙漠深处走 40 千米，已知每人最多可携带一个人 48 天的食物和水，不准将部分食物存放在途中，问其中一人最远可以深入沙漠多少千米？（要求 2 人最后返回出发点）

2. 2 人要到沙漠中探险，他们每天向沙漠深处走 40 千米，已知每人最多可携带一个人 48 天的食物和水，允许将部分食物存放在途中，问其中一人最远可以深入沙漠多少千米？（要求 2 人最后返回出发点）

3. 3 人要到沙漠中探险，他们每天向沙漠深处走 40 千米，已知每人最多可携带一个人 48 天的食物和水，问其中一人最远可以深入沙漠多少千米？（要求 3 人最后返回出发点）

4. 李老师放学后，沿某路公共汽车路线以匀速步行回家，该路公共汽车也以匀速不停地运行，每隔 18 分钟就有辆公共汽车从后面超过他，每隔 14 分钟就遇到迎面开来的一辆公共汽车，问该路公共汽车每隔多少分钟发一次车？公共汽车的速度是李老师步行速度的几倍？

5. 张丽沿着电车线路行走，每 24 分钟有一辆电车从后面追上，每 8 分钟有一辆电车迎面开来。假设两个起点站的发车间隔是相同的，求这个发车间隔。



学习笔记



第十讲

变换与操作



预 习



知识 GPS

(1) 本讲内容

- A. 动手操作
- B. 找规律
- C. 寻找不变量

(2) 前铺知识

- A. 趣题巧解 (四年级·暑期)
- B. 从简单开始找规律 (四年级·秋季)

(3) 后续知识

- A. 几何(十) (六年级·暑期)
- B. 构造与论证 (六年级·秋季)



智慧之路

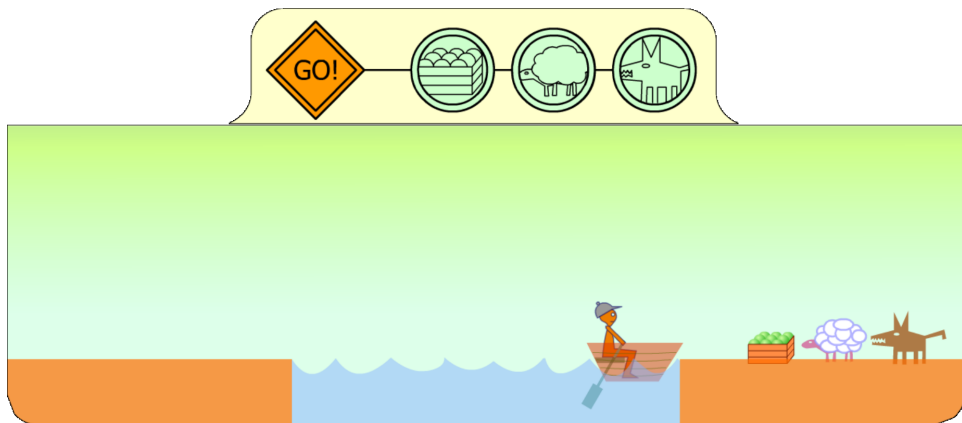
A. 不完全归纳法

B. 寻找不变量



课前游戏

1. 一个人用一只小船过河,他带了三样东西:一只狼、一只羊、一筐青菜.他每次只能带一样东西过河,而且没有人的时候狼会吃羊、羊会吃草.这个人应该怎样过河,才能保证三样东西都完整?(有游戏)





新 课

组

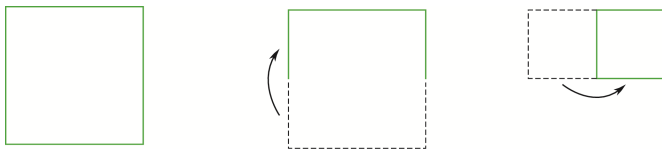
一

*动手操作

*寻找不变量

*从简单开始找规律

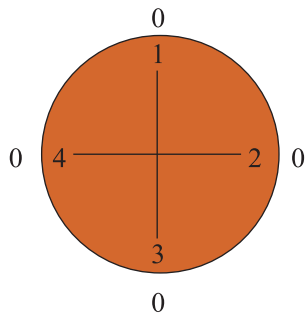
1. 如下图所示，将正方形纸片由下往上对折，再由左向右对折，称为完成一次操作。按上述规则完成五次操作以后，剪去所得小正方形的左下角。问当展开这张正方形纸片后，一共有多少个小洞孔？



2. 向电脑输入汉字，每个页面最多可输入 1677 个五号字。现在页面中有 1 个五号字，将它复制后粘贴到该页面上，就得到 2 个字；再将这 2 个字复制后粘贴到该页面，就得到 4 个字。每次复制和粘贴为 1 次操作，要使整个页面都排满五号字，至少需要操作多少次？

3. 对任意两个不同的自然数, 将其中较大的数换成这两个数之差, 称为一次变换. 如对 18 和 42 可进行这样的连续变换: 18, 42 → 18, 24 → 18, 6 → 12, 6 → 6, 6, 直到两数相同为止. 问对 12345 和 54321 进行这样的连续变换, 最后得到的两个相同的数是多少?
4. 先写出一个两位数 62, 接着在 62 右边写这两个数字的和 8, 得到 628, 再写末两位数字 2 和 8 的和 10, 得到 62810, 用上述方法得到一个有 2016 位的整数: 6 2 8 1 0 1 1 2 3 ..., 则这个整数的数字之和是_____.
5. 在纸上写着一列自然数 1, 2, ..., 98, 99, 100, 101, 102. 一次操作是指将这列数中最前面的三个数划去, 然后把这三个数的和写在数列的最后面. 例如: 第一次操作后得到 4, 5, ..., 98, 99, 100, 101, 102, 6; 第二次操作后得到 7, 8, ..., 98, 99, 100, 101, 102, 6, 15. 这样不断进行下去, 最后将只剩下一个数, 则最后剩下的数是_____.

6. 图中是一个圆盘，中心轴固定在黑板上。开始时，圆盘上每个数字所对应的黑板处均写着 0。然后转动圆盘，每次可以转动 90° 的任意整数倍，圆盘上的四个数将分别正对着黑板上写数的位置，将圆盘上的数加到黑板上对应位置的数上。问经过若干次后，黑板上的四个数是否可能都是 1999？



相同的结果

- 哪两个数相加的结果和相乘的结果相同？
哪三个数相加的结果和相乘的结果相同？
哪四个数相加的结果和相乘的结果相同？
哪五个数相加的结果和相乘的结果相同？



*称物体

*奇偶性

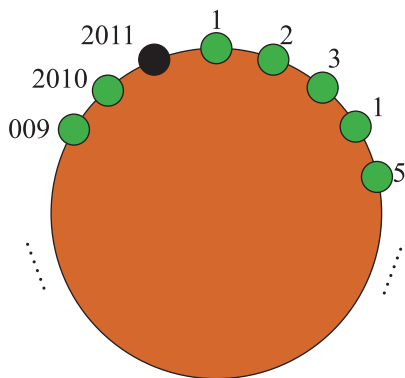
*数的整除特征运用

1. 今有 101 枚硬币，其中有 100 枚同样的真币和 1 枚伪币，伪币和真币的重量不同。现需弄清楚伪币究竟比真币轻还是重，但只有一架没有砝码的天平，那么怎样利用这架天平称两次，来达到目的？
2. 你有四个装药丸的罐子，每个药丸都有一定的重量，被污染的药丸是没被污染的重量+1。只称量一次，如何判断哪个罐子的药被污染了？
3. 对于自然数 n 进行如下变换：如果 n 是奇数则加上 1991；如果 n 是偶数则除以 2。现对数 1980 连续做这种操作，问变换中是否可能出现 2000？
4. 黑板上有一个数字 1，每次可以把它变成比原先大 1 的数，或者变成原先两倍的数，那么变到 10 的方法有多少种？

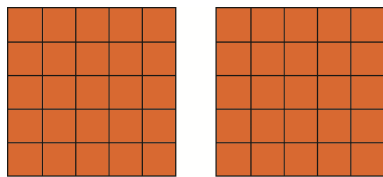


5. 6 个自然数的和为 100，对这 6 个数做如下的变换：找出其中最大的数和最小的数，求这两个数的平均数。如果平均数是整数，那么就用平均数代替最大数和最小数；如果平均数不是整数，那么就用平均数相邻的两个整数来代替最大数和最小数。将上述变换继续下去，直至不再发生变化，问最后得到哪 6 个数？

6. 如下图所示，小刚在圆周上放了 1 枚黑子和 2010 枚绿子，从黑子开始，按顺时针方向，每隔一枚，取走一枚，即留下奇数号棋子，取走偶数号棋子，若黑子初始位置是第 2011 号，则最后剩下的棋子最初是第多少枚？



7. 如下图所示有两个 5×5 的方格图。请在方格图中，用涂阴影的方法，涂出两个不相同的图形，使这两个图形的面积都等于 9，周长都等于 20，并且使第一个图形有 4 条对称轴，第二个图形有 2 条对称轴。



8. 有两个容积分别为 7 升和 9 升的无刻度且上、下径不均匀的空杯子和一个水龙头. 若接水、用一个杯子倒满另一个杯子、把水倒掉都算作一个操作, 那么至少经过多少次操作才能量出 4 升水?
9. 将一个数加、减、乘、除一个任意一位数视为一次操作, 比如 53 可以通过加 3、除以 7、除以 8 三次操作变成 1. 那么 2014 至少经过_____次操作可以变成 1.
10. 在黑板上写有 1~2013 这 2013 个数, 每次执行以下操作: 擦掉两个数, 并写上它们的数字和. 最后剩下 4 个数的乘积为 27, 那这 4 个数的和是多少?





家庭作业

1. 向电脑输入汉字，每个页面最多可输入 1038 个五号字。现在页面中有 1 个五号字，将它复制后粘贴到该页面上，就得到 2 个字；再将这 2 个字复制后粘贴到该页面，就得到 4 个字。每次复制和粘贴为 1 次操作，要使整个页面都排满五号字，至少需要操作_____次。

2. 在纸上写着一列自然数 $1, 2, \dots, 197, 198$ 。一次操作是指将这列数中最前面的三个数划去，然后把这三个数的和写在数列的最后面。例如：第一次操作后得到 $4, 5, \dots, 197, 198, 6$ ；而第二次操作后得到 $7, 8, \dots, 197, 198, 6, 15$ 。这样不断进行下去，最后将只剩下一个数，则最后剩下的数是_____。

3. 9 个金币中，有一个比真金币轻的假金币，你能用天平称两次就找出来吗？（天平无砝码）

第十一讲

牛吃草



预 习



知识 GPS

(1) 本讲内容

- A. 经典牛吃草问题
- B. 变形牛吃草

(2) 前铺知识

- A. 方程 (五年级·秋季)
- B. 方程组 (五年级·秋季)

(3) 后续知识

- A. 应用题综合 (六年级·春季)



智慧之路

- A. 消去法
B. 化归思想



课前加油站

(1) 2 个苹果+3 个梨=13 元

4 个苹果+2 个梨=14 元

1 个苹果___元，1 个梨___元。

(2) 平平有一些钱，如果每天花 2 元，能花 10 天。

A. 每天花 4 元，能花多少天？

B. 每天花 1 元，能花多少天？

(3) 平平原有一些钱，每天还匀速挣一些钱，如果每天花 2 元，能花 10 天。

A. 每天花 4 元，能否花 5 天？

B. 每天花 1 元，能否花 20 天？



新 课

组

一

*草长的速度

*原有的草量

*把牛分成两部分

1. 24 头牛 6 天可以将一片牧草吃完，21 头牛 8 天也可以将这片牧草吃完。如果每天草的增长量相等，要使这片牧草永远吃不完，至多放几头牛吃这片牧草？

2. 一片青草地，每天都匀速长出青草，这片青草可供 27 头牛吃 6 周，或供 23 头牛吃 9 周，那么这片草地可供 21 头牛吃几周？

3. 一片青草地，草每天均匀生长，如果可供 24 头牛吃 6 天，20 头牛吃 10 天，那么可供 19 头牛吃多少天？

4. 有一池泉水，泉底不断涌出泉水，且每小时涌出的泉水一样多．如果用 8 部抽水机，10 小时能把全池泉水抽干；如果用 12 部抽水机，6 小时能把全池泉水抽干．那么用 14 部抽水机，多少小时能把全池泉水抽干？

5. 有一块牧场，可供 10 头牛吃 20 天，15 头牛吃 10 天，则它可供多少头牛吃 4 天？

6. 一个车站的票口，每分钟均匀的进入若干人，如果开 5 个票口，30 分钟进完；如果开 6 个票口，20 分钟进完．问要 10 分钟进完，要开多少个票口？

7. 现欲将一池塘水全部抽干, 同时有水匀速流入池塘. 若用 8 台抽水机 10 天可以抽干; 用 6 台抽水机 20 天可以抽干. 问若要 5 天抽干水, 需多少台同样的抽水机来抽水?

8. 一只船发现漏水时, 已经进了一些水, 水匀速进入船内. 如果 10 人淘水, 3 小时淘完; 如果 5 人淘水 8 小时淘完. 如果要求 2 小时淘完, 要安排多少人淘水?



把 20 个 5 分钱的硬币, 摆在正方形的四条边上, 使每边都有 4 角 5 分钱, 怎么摆呢?



*牛吃草问题的复杂变形

**1. 进入冬季后, 有一片牧场上的草开始枯萎, 因此草会均匀地减少. 现在开始在这片牧场上放羊, 如果有 38 只羊, 把草吃完需要 25 天; 如果有 30 只羊, 把草吃完需要 30 天. 如果有 20 只羊, 这片牧场可以吃多少天?



- **2. 快、中、慢三车同时从 A 地出发，追赶一辆自行车，它们的速度分别是每小时 24 千米、每小时 20 千米和每小时 19 千米，快车追上自行车用了 6 小时，中车追上自行车用了 10 小时，那么慢车追上自行车用了多少小时？
- **3. 小新、正南、妮妮三人同时从学校出发到公园去。小新、正南两人的速度分别是每分钟 20 米和每分钟 16 米。在他们出发的同时，风间从公园迎面走来，分别在他们出发后 6 分钟、7 分钟、8 分钟先后与小新、正南、妮妮相遇，求妮妮的速度。
- *4. 一片牧草，每天生长的速度相同。现在这片牧场上的草可供 16 头牛吃 20 天，或者可供 80 只羊吃 12 天。如果 1 头牛的吃草量等于 4 只羊的吃草量，那么 10 头牛和 60 只羊一起吃可以吃多少天？
- **5. 有一牧场长满草，每天牧草匀速生长。这个牧场可供 17 头牛吃 30 天，可供 19 头牛吃 24 天。现有牛若干头在吃草，6 天后，杀了 4 头牛，余下的牛吃了 2 天将草吃完。问原来有牛多少头？

- ***6. 有一片草地，可供 8 只羊吃 20 天，或供 14 只羊吃 10 天。假设草每天的生长速度不变。现有羊若干只，吃了 4 天后又增加了 6 只，这样又吃了 2 天便将草吃完，问原有羊多少只？
- ***7. 12 头牛 4 周吃完 6 公顷的牧草，20 头牛 6 周吃完 12 公顷的牧草。假设每公顷原有草量相等，草的生长速度不变。问多少头牛 8 周吃完 16 公顷的牧草？
- *8. 在一片牧场里，放养 4 头牛，吃 6 亩草，18 天可以吃完；放养 6 头牛，吃 10 亩草，30 天可以吃完，请问放入多少头牛，吃 8 亩草，24 天可以吃完？（假定这片牧场每亩中的原草量相同，且每天草的生长量相等）
- ***9. 把一片均匀生长的大草地分成三块，面积分别为 5 公顷、15 公顷和 24 公顷。如果第一块草地可以供 10 头牛吃 30 天，第二块草地可以供 28 头牛吃 45 天，那么第三块草地可以供多少头牛吃 80 天？





1. 15 头牛 10 天可以将一片牧草吃完，10 头牛 20 天也可以将这片牧草吃完。如果每天草的增长量相等，要使这片牧草永远吃不完，至多放几头牛吃这片牧草？
2. 牧场上长满牧草，每天牧草都匀速生长。这片牧场可供 10 只羊吃 20 天，可供 15 只羊吃 10 天。可供 25 只羊吃几天？
3. 一只船发现漏水时，已经进了一些水，现在水匀速进入船内，如果 3 人淘水 40 分钟可以把水淘完；6 人淘水 16 分钟可以把水淘完，那么，多少人淘水 20 分钟可以把水淘完？



4. 林子里有猴子喜欢吃的野果, 23 只猴子可在 9 周内吃光, 21 只猴子可在 12 周内吃光, 问如果要 4 周吃光野果, 则需有多少只猴子一起吃? (假定野果的生长速度不变)

5. 由于天气逐渐冷起来, 牧场上的草不仅不生长, 反而以固定的速度在减少. 已知某块草地上的草可供 20 头牛吃 5 天, 或可供 15 头牛吃 6 天. 照此计算, 可以供多少头牛吃 10 天?



学习笔记



第十二讲

余数问题



预 习



知识 GPS

(1) 本讲内容

- A. 带余数的除法
- B. 三大余数定理（加法余数定理，乘法余数定理和同余定理）
- C. 有关弃九法原理的应用

(2) 前铺知识

- A. 余数的变化 (四年级·暑期)
- B. 神奇的“9” (五年级·秋季)

(3) 后续知识

- 数论综合 (六年级·秋季)



智慧之路

A. 借来还去

B. 抓不变量



课前加油站

(1) 余数的加法定理： a 与 b 的和除以 c 的余数，等于 a, b 分别除以 c 的余数之和，或这个和除以 c 的余数。

(2) 余数的乘法定理： a 与 b 的乘积除以 c 的余数，等于 a, b 分别除以 c 的余数的积，或者这个积除以 c 所得的余数。

(3) 同余定理：若两个整数 a, b 被自然数 m 除有相同的余数，那么称 a, b 对于模 m 同余，用式子表示为： $a \equiv b \pmod{m}$ ，左边的式子叫做同余式。

同余式读作： a 同余于 b ，模 m 。由同余的性质，我们可以得到一个非常重要的推论：

若两个数 a, b 除以同一个数 m 得到的余数相同，则 a, b 的差一定能被 m 整除。

用式子表示为：如果有 $a \equiv b \pmod{m}$ ，那么一定有 $a-b = mk$ ， k 是整数，即 $m \mid (a-b)$ 。



新 课

组

一

*余数和最小公倍的结合

1. 一个大于 10 的自然数，被 16 除和被 20 除的余数都是 8，这个数最小是多少？

2. 一盒棋子，无论是 9 个一堆，还是 12 个一堆，最后都多出 2 个。这盒棋子至少有多少个？

3. 常青小学六年级有若干人。

(1) 如果 3 人一行最后余 2 人，7 人一行最后余 2 人，11 人一行最后也余 2 人，六年级最少有多少人？

(2) 如果 3 人一行余 1 人，7 人一行余 5 人，11 人一行余 9 人，六年级最少有多少人？

* (3) 如果 7 人一行余 2 人，8 人一行余 4 人，六年级最少有多少人？

4. 帅帅爬楼梯（台阶数大于 10），每次上 5 个台阶，还剩余 3 个；如果每次上 9 个台阶，还剩余 7 个台阶。这个楼梯最少有多少个台阶？

**5. 将分子相同的三个最简假分数化成带分数后，分别是： $a\frac{2}{3}$ ， $b\frac{3}{4}$ ， $c\frac{4}{5}$ 。求 $a\frac{2}{3} + b\frac{3}{4} + c\frac{4}{5}$ 的最小值。



锯木头

小林自以为聪明，常讲出一些似乎很“充分”的理由。一次，王叔叔要把一根 5 米长的木头锯成 8 段。他对小林说：“我锯一段要用 7 分钟，一共用多少分钟锯完呢？”小林马上说：“你看锯一段要用 7 分钟，锯 8 段，七八五十

六，当然是 56 分钟了。”哪知王叔叔哈哈大笑，说：“错了！”你知道小林错在哪里吗？

组 二

*余数和分解质因数的结合

*余数的变化规律

1. 用某自然数 a 去除 1992，得到商是 46，余数是 r ，求 a 和 r 。

2. 有三个自然数 a, b, c ，已知 b 除以 a ，得商 3 余 3； c 除以 a ，得商 9 余 11。则 c 除以 b ，得到的余数是_____。

3. 1013 除以一个两位数，余数是 12。求出符合条件的所有的两位数。

4. 甲、乙两数的和是 1088，甲数除以乙数商 11 余 32，求甲、乙两数。

5. 一个两位数除 310, 余数是 37, 求这样的两位数.
6. 有两个自然数相除, 商是 17, 余数是 13, 已知被除数、除数、商与余数之和为 2113, 则被除数是多少?
7. 用一个自然数去除另一个自然数, 商为 40, 余数是 16. 被除数、除数、商、余数的和是 933, 求这 2 个自然数各是多少?
8. 求 $478 \times 296 \times 351$ 除以 17 的余数.
9. 求 $6443^{12} \div 19$ 的余数.

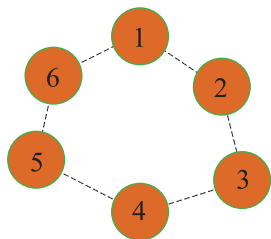
10. $\underbrace{222\cdots 2}_{2000\text{个} "2"}$ 除以 13 所得余数是_____.

11. 有一个整数，除 300、262、205 得到相同的余数。问这个整数是几？

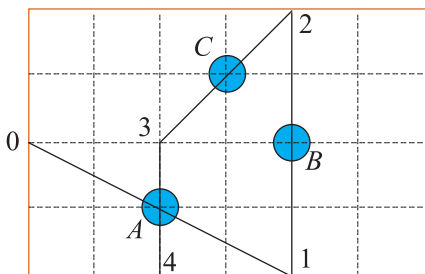
12. 一个大于 1 的数去除 290，235，200 时，得余数分别为 a ， $a+2$ ， $a+5$ ，则这个自然数是多少？

13. 学校运动会开幕式的旗手排成一行，首先从左向右 1 至 3 循环报数，最右端的旗手报 2；然后从右向左 1 至 4 循环报数，最左端的旗手报 3，两次都报 1 的旗手有 12 人。那么，开幕式一共有旗手_____人。

14. 一只蚂蚁站在 1 号位置上, 它第 1 次跳 1 步, 到达 2 号位置; 第 2 次跳 2 步, 到达 4 号位置; 第 3 次跳 3 步, 到达 1 号位置……第 n 次跳 n 步, 当蚂蚱沿着顺时针跳了 100 次时, 到达__号位置.



15. 如下图所示, 是一片刚刚收割过的稻田, 每个小正方形的边长是 1 米, A 、 B 、 C 三点周围的阴影部分是圆形的水洼. 一只小鸟飞来飞去, 四处觅食, 它最初停留在 0 号位, 过了一会儿, 它跃过水洼, 飞到关于 A 点对称的 1 号位; 不久, 它又飞到关于 B 点对称的 2 号位; 接着, 它飞到关于 C 点对称的 3 号位, 再飞到关于 A 点对称的 4 号位, …… , 如此继续, 一直对称地飞下去. 由此推断, 2004 号位和 0 号位之间的距离是_____米.



- **16. $2008 \div a = b \cdots 6$, a, b 均为自然数. a 有_____种不同的取值.



- **17. 三个不同的自然数的和为 2001，它们分别除以 19，23，31 所得的商相同，所得的余数也相同，这三个数是_____，_____，_____。



家庭作业

1. 两数相除，商 4 余 8，被除数、除数、商数、余数四数之和等于 415，则被除数是_____。

2. 一个大于 10 的自然数，被 15 除和被 20 除的余数都是 2，这个数最小是多少？

3. 被除数、除数、商与余数之和是 2143，已知商是 33，余数是 52，求被除数和除数。

4. 有一个大于 1 的整数, 除 45, 59, 101 所得的余数相同, 求这个数的可能范围.
5. 一个两位数除以 13 的不完全商是 6, 除以 11 所得的余数是 6, 求这个两位数.
6. 有一列数排成一行, 其中第一个数是 3, 第二个数是 10, 从第三个数开始, 每个数恰好是前两个数的和, 那么第 1997 个数被 3 除所得的余数是多少?



学习笔记



第十三讲

不定方程



预 习



知识 GPS

(1) 本讲内容

- A. 解不定方程
- B. 不定方程的应用

(2) 前铺知识

- | | |
|--------------|----------|
| A. 简易方程 | (四年级·秋季) |
| B. 方程 | (五年级·秋季) |
| C. 方程组 | (五年级·秋季) |
| D. 数的整除特征(一) | (五年级·秋季) |
| E. 数的整除特征(二) | (五年级·秋季) |
| F. 奇偶分析(二) | (四年级·春季) |

(3) 后续知识

- | | |
|------|----------|
| 方程综合 | (六年级·暑期) |
|------|----------|



智慧之路

- A. 数学方法：枚举法、尾数分析法、动手操作
B. 数学思想：方程思想、分类思想



课前加油站

动手操作

1. 有 1 个没有刻度的 5 升水杯和 1 个没有刻度的 3 升水杯，你能用这两个水杯倒出 4 升水吗？
2. 有 1 个没有刻度的 5 升水杯和 1 个没有刻度的 3 升水杯，你能用这两个水杯倒出 34 升水吗？



新 课

组

一

*解不定方程

1. 解不定方程 .

(1) 求 $x+y=5$ 的自然数解 ;

(2) 求 $2x+3y=18$ 的自然数解 ;

(3) 求 $5x-3y=16$ 的一组自然数解 ;

(4) 求 $4x+5y=37$ 的一组自然数解 .

2. 求 $4x+5y+2z=37$ 的一组自然数解.

组

二

*不定方程的应用

1. 甲、乙二人搬砖，甲搬的砖数是 18 的倍数，乙搬的砖数是 23 的倍数，两人共搬了 300 块砖。问：甲、乙二人谁搬的砖多？多几块？
2. 有两种不同规格的油桶若干个，大的能装 8 千克油，小的能装 5 千克油，44 千克油恰好装满这些油桶。问：大、小油桶各几个？
3. 66 人去公园划船，小船每只坐 4 人，大船每只可以坐 7 人。所有人都去划船则需要租大、小船各多少只？

4. 现有 3 米长和 5 米长的钢管各 6 根，安装 31 米长的管道，问怎样使用最省料？

*5. 有一堆围棋子，白子是黑子的 3 倍，每次拿出 7 颗白子，4 颗黑子，经过若干次（不到 10 次）后，剩下的白子是黑子的 11 倍，问：原来白子有多少颗？

*6. 小明玩套圈游戏，套中小鸡一次得 9 分，套中小猴一次得 5 分，套中小狗一次得 2 分，小明共套了 10 次，每次都套中了，每个小玩具都至少被套中一次，小明套 10 次共得了 61 分。问：小鸡至多被套中多少次？

*7. 房间内有凳子和椅子各若干个，凳子每个 3 条腿，椅子每把 4 条腿，都坐上人之后连人的腿在内共 35 条腿．求房间内有凳子、椅子和人各多少？

**8. 某地收费的标准是：若每月用电不超过 50 度，则每度收 5 角；若超过 50 度，则超出部分按每度 8 角收费．某月甲用户比乙用户多交 3 元 3 角电费，问：这个月甲、乙各用了多少度电？



镜子里的时间

请你手拿闹钟，对着镜子照．你会发现手里的闹钟和镜子里的闹钟的时间不相同．

如 闹钟的时间 镜子里闹钟的时间

9 00	3 00
4 30	7 30
5 15	6 45
8 20	3 40

闹钟的时间是 3 : 25，你能不看镜子，马上说出镜子里闹钟的时间吗？

组

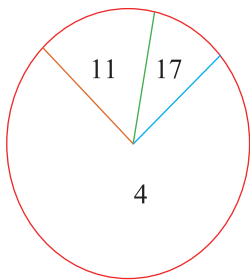
三

*不定方程的应用

**1. 李家和王家共养了 521 头牛，李家的牛群中有 67% 是母牛，而王家的牛群中仅有 $\frac{1}{13}$ 是母牛，问：李家和王家各养了多少头牛？

**2. \overline{abc} 表示一个十进制的三位数，若 \overline{abc} 等于由 a, b, c 三个数码所组成的全体两位数的和，写出所有满足上述条件的三位数。

**3. 在新年联欢会上，某班组织了一场飞镖比赛。如下图所示，飞镖的靶子分为三块区域，分别对应 17 分、11 分和 4 分。每人以扔若干次飞镖，脱靶不得分，投中靶子就可以得到相应的分数。若恰好投在两块（或三块）区域的交界线上，则得两块（或三块）区域中分数最高区域的分数。如果比赛规定恰好投中 120 分才能获奖，问：要想获奖至少需要投中_____次飞镖。



- ***4. 一小、二小两校春游的人数是 10 的整数倍. 如果两校都租用有 14 个座位的旅游车, 则两校共需租用 72 辆这种车, 如果两校都租用 19 个座位的旅游车, 则二小要比一小多租用 7 辆这种车. 现在知道两校人员不合乘一辆车, 且每辆车尽量坐满. 问, 两校参加这次春游的人数各是多少?



家庭作业

1. 求 $x+y=7$ 的自然数解.

2. 求 $3x+y=10$ 的自然数解.



3. 饭店有大、小两种餐桌，大餐桌可坐 5 个人，小餐桌可坐 3 个人，有 16 个人去吃饭，每张桌子都要坐满，问：要订几张大桌、几张小桌？

4. 把 99 个学生分成超过 10 组的小组，这些小组分成两类，A 类小组每组 12 人，B 类小组每组 5 人，问：A、B 两类各有多少小组？

5. 六年级同学玩投球游戏，把红、黄两种颜色的球投到 5 米外的小铁筐里，投进一个红球得 7 分，投进一个黄球得 5 分，小芳共得 58 分，那么她分别投进多少个红球和黄球？



学习笔记



反侵权盗版声明

电子工业出版社依法对本作品享有专有出版权。任何未经权利人书面许可，复制、销售或通过信息网络传播本作品的行为；歪曲、篡改、剽窃本作品的行为，均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人应承担相应的民事责任 and 行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。

为了维护市场秩序，保护权利人的合法权益，我社将依法查处和打击侵权盗版的单位和个人。欢迎社会各界人士积极举报侵权盗版行为，本社将奖励举报有功人员，并保证举报人的信息不被泄露。

举报电话：(010) 88254396；(010) 88258888

传 真：(010) 88254397

E-mail: dbqq@phei.com.cn

通信地址：北京市万寿路 173 信箱

电子工业出版社总编办公室

邮 编：100036

